

第 4 章 受弯构件正截面承载力

4.1 概述

受弯构件是指截面上通常有弯矩和剪力共同作用而轴力可以忽略不计的构件。梁和板是典型的受弯构件。它们是土木工程中数量最多、使用面最广的一类构件。梁和板的区别在于：梁的截面高度一般大于其宽度，而板的截面高度则远小于其宽度。

受弯构件在荷载等因素的作用下，可能发生两种主要的破坏：一种是沿弯矩最大的截面破坏，另一种是沿剪力最大或弯矩和剪力都较大的截面破坏。当受弯构件沿弯矩最大的截面破坏时，破坏截面与构件的轴线垂直，称为沿正截面破坏；当受弯构件沿剪力最大或弯矩和剪力都较大的截面破坏时，破坏截面与构件的轴线斜交，称为沿斜截面破坏。

进行受弯构件设计时，既要保证构件不得沿正截面发生破坏，又要保证构件不得沿斜截面发生破坏，因此要进行正截面承载能力和斜截面承载能力计算。本章只讨论受弯构件的正截面承载能力计算。

结构和构件要满足承载能力极限状态和正常使用极限状态的要求。梁、板正截面受弯承载力计算就是从满足承载能力极限状态出发的，即要求满足

$$M \leq M_u \quad (4-1)$$

式中的 M 是受弯构件正截面的弯矩设计值，它是由结构上的作用所产生的内力设计值， M_u 是受弯构件正截面受弯承载力的设计值，它是由正截面上材料所产生的抗力，这里的下角码 u 是指极限值。

4.2 梁、板的一般构造

4.2.1 截面形状与尺寸

1. 截面形状

梁、板常用矩形、T形、I字形、槽形、空心板和倒L形梁等对称和不对称截面，如图4—1所示。

2. 梁、板的截面尺寸

(1) 独立的简支梁的截面高度与其跨度的比值可为 $1/12$ 左右，独立的悬臂梁的截面高度与其跨度的比值可为 $1/6$ 左右。矩形截面梁的高宽比 h/b 一般取 $2.0 \sim 2.5$ ；T形截面梁的 h/b 一般取为 $2.5 \sim 4.0$ (此处 b 为梁肋宽)。为了统一模板尺寸，

矩形截面的宽度或 T 形截面的肋宽 b 一般取为 100、120、150、(180)、200、(220)、250 和 300mm，300mm 以下的级差为 50mm；括号中的数值仅用于木模。梁的高 h 度一般采用 250、300、350、750、800、900、1000mm 等尺寸。800mm 以下的级差为 50mm，以上的为 100mm。

(2) 现浇板的宽度一般较大，设计时可取单位宽度 ($b=1000\text{mm}$) 进行计算。

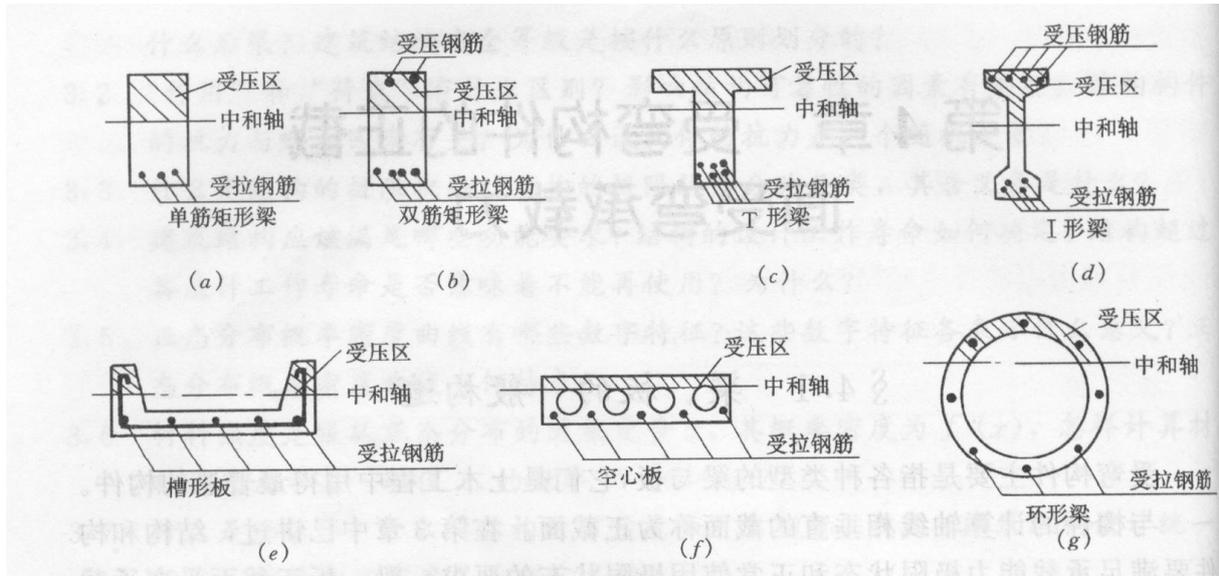


图 4—1 常用梁、板截面形状

其厚度除应满足各项功能要求外，尚应满足表 4—1 的要求。

表 4-1 建筑工程现浇钢筋混凝土板的最小厚度 (mm)

板的类别		厚度
单向板	屋面板	60
	民用建筑楼板	60
	工业建筑楼板	70
	行车道下的楼板	80
双向板		80
密肋板	肋间距小于或等于 700mm	40
	肋间距大于 700mm	50
悬臂板	板的悬臂长度小于或等于 500mm	60
	板的悬臂长度大于 500mm	80
无梁楼板		150

注：悬臂板的厚度是指悬臂根部的厚度，预制板的最小厚度应满足钢筋保护厚度的要求。

板的保护层厚度一般取 15mm，所以计算板的配筋时，一般可取板的有效高度 $h_0 = h - 20\text{mm}$ ，但对露天或室内潮湿环境下的板，当采用 C25 及 C30 时，板的保护层宜加厚 10mm，可取板的有效高度 $h_0 = h - 30\text{mm}$ 。

4.2.2 材料选择与一般构造

1. 混凝土强度等级

梁、板常用的混凝土强度等级是 C20、C30、C40。

2. 钢筋强度等级及常用直径

(1) 梁的钢筋强度等级和常用直径

1) 梁内纵向受力钢筋

梁中纵向受力钢筋宜采用 HRB400 级或 RRB400 级和 HRB335 级，常用直径为 12mm、14mm、16mm、18mm、20mm、22mm 和 25mm，根数不得少于 2 根。梁内受力钢筋的直径宜尽可能相同，当采用两种不同的直径时，它们之间相差至少应为 2 mm，以便在施工时容易为肉眼识别，但相差也不宜超过 6 mm。对于绑扎的钢筋骨架，其纵向受力钢筋的直径：当梁高为 300mm 及以上时，不应小于 10mm；当梁高小于 300mm 时，不应小于 8mm。

为了便于浇注混凝土以保证钢筋周围混凝土的密实性，纵筋的净间距应满足要求。

为了固定箍筋并与钢筋连成骨架，在梁的受压区内应设置架立钢筋。架立钢筋的直径与梁的跨度 l 有关。当 $l > 6\text{m}$ 时，架立钢筋的直径不宜小于 12mm；当 $l = 4 \sim 6\text{m}$ 时，不宜小于 10 mm，当 $l < 4\text{m}$ 时，不宜小于 8 mm。简支梁架立钢筋一般伸至梁端；当考虑其受力时，架立钢筋两端在支座内应有足够的锚固长度。当梁扣除翼缘厚度后的截面高度大于或等于 450mm 时，在梁的两个侧面应沿高度配置纵向构造钢筋，每侧纵向构造钢筋(不包括受力钢筋及架立钢筋)的截面面积不应小于扣除翼缘厚度后的截面面积的 0.1%，纵向构造钢筋的间距不宜大于 200mm。

2) 梁的箍筋宜采用 HPB235 级(I 级)、HRB335(II 级)和 HRB400(III 级钢筋)级的钢筋，常用直径是 6mm、8mm 和 10mm。

(2) 板的钢筋强度等级及常用直径

1) 板的受力钢筋

受力钢筋常用 HPB235 级(I 级)、HRB335 级(II 级)和 HRB400 级(III 级)级钢筋，

直径通常采用 6mm, 8mm, 10mm, 板厚度 $h \leq 40\text{mm}$ 时, 可采用 4mm, 5mm。采用绑扎配筋时, 受力钢筋的间距一般不小于 70mm; 当板厚 $h \leq 150\text{mm}$ 时, 不应大于 200mm; 当板厚 $h > 150\text{mm}$ 时, 不应大于 $1.5h$, 且板的每米宽度内不应少于 3 根。

2) 板的分布钢筋

当按单向板设计时, 除沿受力方向布置受力钢筋外, 还应在垂直受力方向布置分布钢筋。分布钢筋宜采用 HPB235 级 (I 级) 和 HRB335 级 (II 级) 的钢筋, 常用直径是 6mm 和 8mm。分布钢筋与受力钢筋绑扎或焊接在一起, 形成钢筋骨架。分布钢筋的作用是: 将板面的荷载更均匀地传递给受力钢筋, 施工过程中固定受力钢筋的位置, 以及抵抗温度和混凝土的收缩应力等。分布钢筋的截面面积不应小于单位长度上受力钢筋截面面积的 15%, 且每米长度内不宜少于 4 根。对预制板, 当有实践经验或可靠措施时, 其分布钢筋可不受此限制, 对处于经常温度变化较大处的板, 其分布钢筋应适当的增加。

(3) 纵向钢筋在梁、板截面内的布置要求

1) 下部钢筋水平方向的净距不小于钢筋直径, 也不小于 25mm; 上部钢筋水平方向的净距则不应小于 1.5 倍钢筋直径, 也不应小于 30mm。

2) 竖向净距不小于钢筋直径也不应小于 25mm。

为了满足这些要求, 梁的纵向受力钢筋有时须放置成两层, 甚至还有多于两层的。上、下钢筋应对齐, 不能错列, 以方便混凝土的浇捣。

当梁的下部钢筋多于两层时, 从第三层起, 钢筋的中距应比下面两层的中距增大一倍。

板内纵向受力钢筋应与分布钢筋相垂直, 并放在外侧, 如图 4—5 所示。

(4) 纵向受拉钢筋的配筋率

设正截面上所有纵向受拉钢筋的合力点至截面受拉边缘的竖向距离为 a , 则合力点至截面受压区边缘的竖向距离 $h_0 = h - a$ 。这里, h 是截面高度, h_0 为截面的有效高度, 称 bh_0 为截面的有效面积, b 是截面宽度。

纵向受拉钢筋的总截面面积用 A_s 表示, 单位为 mm^2 。纵向受拉钢筋总截面面积 A_s 与正截面的有效面积 bh_0 的比值, 称为纵向受拉钢筋的配筋百分率, 用 ρ 表示, 或简称配筋率, 用百分数来计量, 即

$$\rho = \frac{A_s}{bh_0} \quad (\%) \quad (4-2)$$

纵向受拉钢筋的配筋百分率 ρ 在一定程度上标志了正截面上纵向受拉钢筋与混凝土之间的面积比率，它是对梁的受力性能有很大影响的一个重要指标。

3. 混凝土保护层厚度

纵向受力钢筋的外表面到截面边缘的垂直距离，称为混凝土保护层厚度，用 c 表示。混凝土保护层有三个作用：1) 保护纵向钢筋不被锈蚀；2) 在火灾等情况下，使钢筋的温度上升缓慢；3) 使纵向钢筋与混凝土有较好的粘结。

梁、板、柱的混凝土保护层厚度与环境类别和混凝土强度等级有关，见附表。由该表知，当环境类别为一类时，即在室内环境下，梁的最小混凝土保护层厚度是 25mm，板的最小混凝土保护层厚度是 15mm。

此外，纵向受力钢筋的混凝土保护层最小厚度(从钢筋外边缘到混凝土表面的距离)尚不应小于钢筋的公称直径。

4.3 受弯构件正截面受弯的受力全过程

4.3.1 适筋梁的试验研究

图 4—6 所示为一混凝土设计强度等级为 C25 的钢筋混凝土简支梁。为消除剪力对正截面受弯的影响，采用两点对称加载方式，使两个对称集中力之间的截面，在忽略自重的情况下，只受纯弯矩而无剪力，称为纯弯区段。在长度为 $l_0/3$ 的纯弯区段布置仪表，以观察加载后梁的受力全过程。

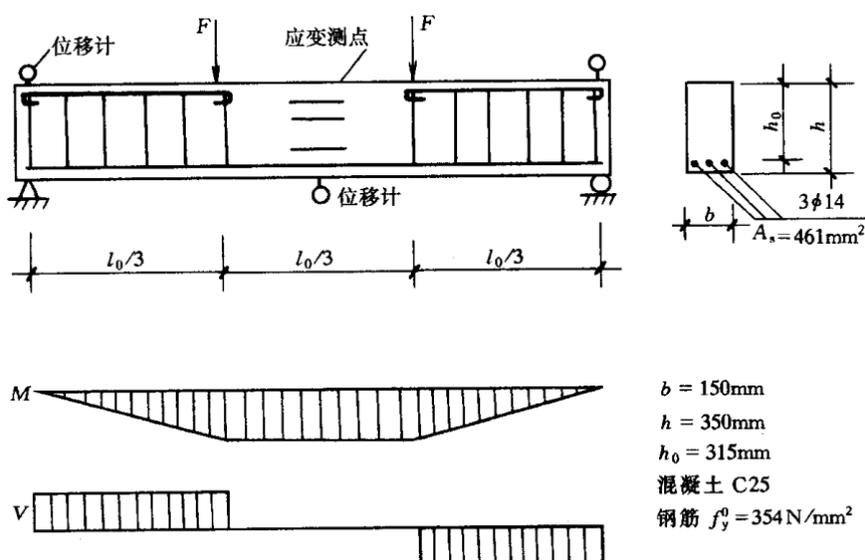


图 4—6 试验梁

荷载是逐级施加的，由零开始直至梁正截面受弯破坏。下面分析在加载过程中，钢筋混凝土受弯构件正截面受力的全过程。

在纯弯段内，沿梁高两侧布置测点，用仪表量测梁的纵向变形。为此，在浇注混凝土前，在梁跨中附近的钢筋表面粘贴应变片，用以量测钢筋的应变。在跨中和支座处分别安装百(千)分表以量测跨中的挠度 f (也有采用挠度计量测挠度的)，有时还要安装倾角仪以量测梁的转角。

图 4—7 为中国建筑科学研究院做钢筋混凝土试验梁的弯矩与截面曲率关系曲线实测结果。图中纵坐标为梁跨中截面的弯矩实验值 M^0 ，横坐标为梁跨中截面曲率实验值 φ^0 。

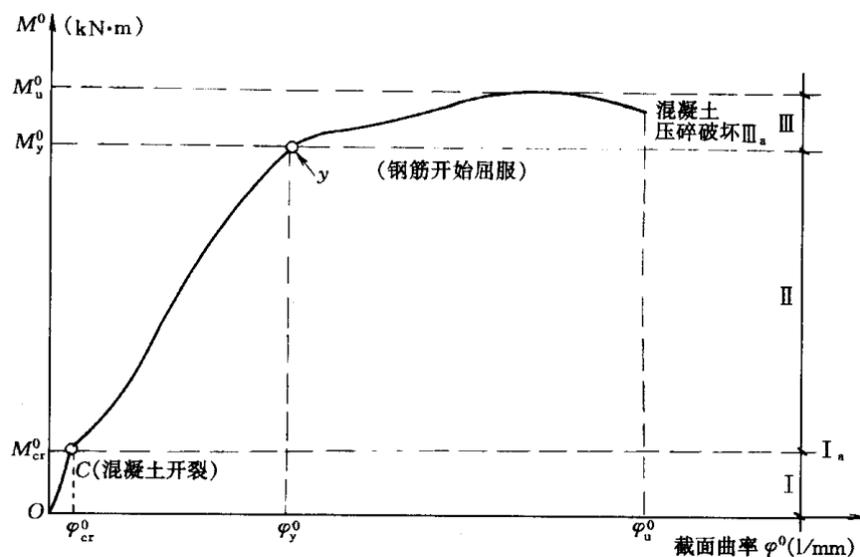


图 4—7 $M^0-\varphi^0$ 图

实验表明，当弯矩较小时，截面上的应力和应变也很小，混凝土和钢筋都处于弹性工作阶段。受压区和受拉区的混凝土应力图形按直线变化，截面曲率或梁的跨中挠度与弯矩的关系接近直线变化，如图 4—7 中的 OC 所示。这时的工作特点是梁尚未出现裂缝，称为第 I 阶段。当弯矩超过开裂弯矩实验值 M_{cr}^0 后，混凝土开裂，且以后一段时间内将不断出现新的裂缝，随着裂缝的出现与不断开展，挠度的增长速度较开裂前为快。这时的工作特点是梁带有裂缝，称为第 II 阶段。如图 4—7 所示，在纵坐标为 M_{cr}^0 处， $M^0-\varphi^0$ 关系曲线上出现了第一个明显转折点 C 。第 II 阶段中，钢筋的应力将随着荷载的增加而增加，当受拉钢筋即将到达屈服强度时，标志着第 II 阶段的终结。 $M^0-\varphi^0$ 关系曲线上出现了第二个明显转折点 y 。截面进入第 III 工作阶段，此时的弯矩为 M_y^0 ，称为屈服弯矩实验值。钢筋一屈服，应变迅速增大，裂缝急剧开展，挠度和截面曲率骤增。随着荷载继续增大，受压区混凝土被压碎，正截面失去受弯承载力，梁破坏。此时的弯矩称为极限弯矩实验值或正截面受弯承载力

的实验值 M_u^0 。可见， $M^0-\varphi^0$ 关系曲线上有两个明显的转折点 C 和 y ，故适筋梁正截面受弯的全过程可划分为三个阶段——未裂阶段、裂缝阶段和破坏阶段。

4.3.2 适筋梁正截面受力的三个阶段

(1) 第一阶段——截面开裂前的未裂阶段

当荷载很小时，截面上的内力很小，应力与应变成正比，截面的应力分布为直线(图 4—8a)，这种受力阶段称为第 I 阶段。当荷载不断增大时，截面上的内力也不断增大，由于受拉区混凝土出现塑性变形，受拉区的应力图形呈曲线。当荷载增大到某一数值时，受拉区边缘的混凝土可达其实际的抗拉强度和抗拉极限应变值。截面处在开裂前的临界状态(图 4—8b)，这种受力状态称为第 I_a 阶段。

(2) 第二阶段——带裂缝工作阶段

梁在各受力阶段的应力、应变图截面受力达 I_a 阶段后，荷载只要稍许增加，截面立即开裂，截面上应力发生重分布，裂缝处混凝土不再承受拉应力，钢筋的拉应力突然增大，受压区混凝土出现明显的塑性变形，应力图形呈曲线(图 4—8c)，这种受力阶段称为第 II 阶段。荷载继续增加，裂缝进一步开展，钢筋和混凝土的应力不断增大。当荷载增加到某一数值时，受拉区纵向受力钢筋开始屈服，钢筋应力达到其屈服强度(图 4—8d)，这种特定的受力状态称为 II_a 阶段。

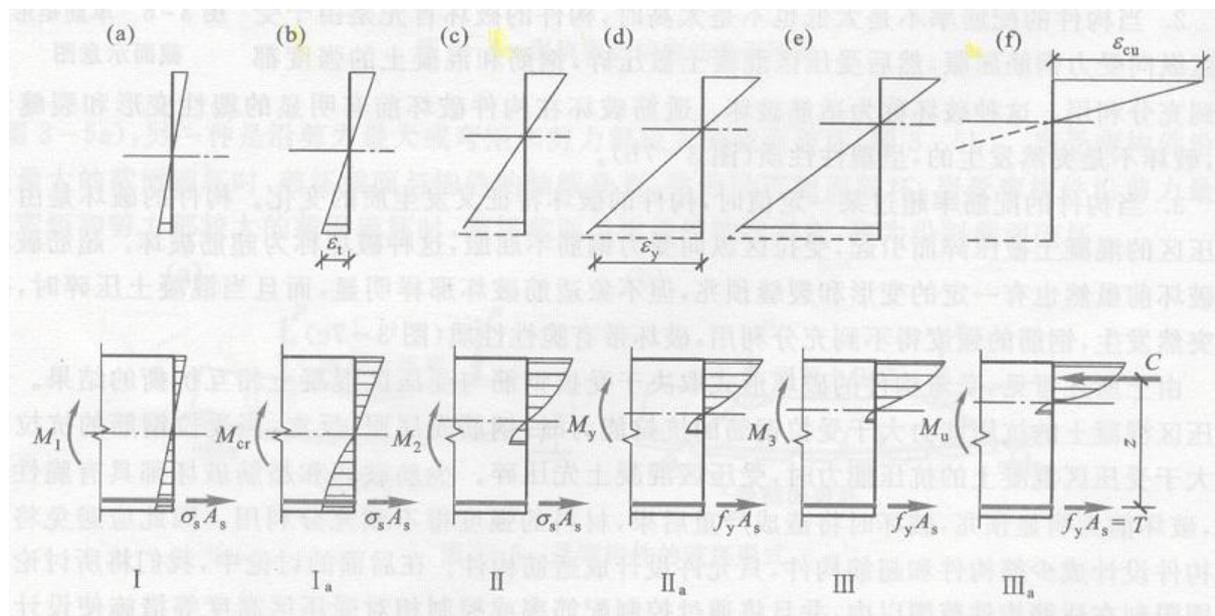


图 4—8 梁在各受力阶段的应力—应变图

C —受力区的合力； T —受拉区合力

(3) 第三阶段——破坏阶段

受拉区纵向受力钢筋屈服后，截面的承载力无明显的增加，但塑性变形急速发

展，裂缝迅速开展，并向受压延伸，受压区面积减小，受压区混凝土压应力迅速增大，这是截面受力的第Ⅲ阶段（4—8e）。在荷载几乎保持不变的情况下，裂缝进一步急剧开展，受压区混凝土出现纵向裂缝，混凝土被完全压碎，截面发生破坏(图 4—8f)，这种特定的受力状态称为第Ⅲ_a阶段。

试验同时表明，从开始加载到构件破坏的整个受力过程中，变形前的平面，变形后仍保持平面。

进行受弯构件截面受力工作阶段的分析，不但可以了解截面受力的全过程，而且为裂缝、变形以及承载力的计算提供了依据。截面抗裂验算是建立在第Ⅰ_a阶段的基础之上，构件使用阶段的变形和裂缝宽度验算是建立在第Ⅱ阶段的基础之上，而截面的承载力计算则时建立在第Ⅲ_a阶段的基础之上的。

4.3.3 正截面受弯的三种破坏形态

实验表明，由于纵向受拉钢筋配筋百分率 ρ 的不同，受弯构件正截面受弯破坏形态有适筋破坏、超筋破坏和少筋破坏三种，如图4—9所示。这三种破坏形态的 $M^0-\varphi^0$ 曲线如图4—10所示。与这三种破坏形态相对应的梁称为适筋梁、超筋梁和少筋梁。

(1) 适筋破坏形态

当 $\rho_{\min}h/h_0 \leq \rho \leq \rho_b$ 时发生适筋破坏形态， ρ_{\min} 、 ρ_b 分别为纵向受拉钢筋的最小配筋率、界限配筋率。适筋梁的破坏特点是构件的破坏首先是由于受拉区纵向受力钢筋屈服，然后受压区混凝土被压碎，钢筋和混凝土的强度都得到充分利用。这种破坏称为适筋破坏。适筋破坏在构件破坏前有明显的塑性变形和裂缝预兆，破坏不是突然发生的，呈塑性性质，见图 4—9(a)，属于延性破坏类型。

(2) 超筋破坏形态

当 $\rho > \rho_b$ 时发生超筋破坏形态，其特点是混凝土受压区先压碎，纵向受拉钢筋不屈服。在受压区边缘纤维应变到达混凝土受弯极限压应变值时，钢筋应力尚小于屈服强度，但此时梁已告破坏。试验表明，钢筋在梁破坏前仍处于弹性工作阶段，裂缝开展不宽，延伸不高，梁的挠度亦不大。它在没有明显预兆的情况下由于受压区混凝土被压碎而突然破坏，故属于脆性破坏类型。超筋梁虽配置过多的受拉钢筋，但由于梁破坏时其应力低于屈服强度，不能充分发挥作用，造成钢材的浪费。这不仅不经济，且破坏前没有预兆，故设计中不允许采用超筋梁。

(3) 少筋破坏形态

当 $\rho < \rho_{\min}h/h_0$ 时发生少筋破坏形态，构件不但承载能力很低，而且只要其一开裂，

裂缝就急速开展，裂缝截面处的拉力全部由钢筋承受，钢筋由于突然增大的应力而屈服，构件立即发生破坏(图4—9c)，这种破坏称为少筋破坏。从单纯满足承载力需要出发，少筋梁的截面尺寸过大，故不经济；同时它的承载力取决于混凝土的抗拉强度，属于脆性破坏类型。

比较适筋梁和超筋梁的破坏，可以发现，两者的差异在于：前者破坏始自受拉钢筋；后者则始自受压区混凝土。显然，总会有一个界限配筋率 ρ_b ，这时钢筋应力到达屈服强度的同时受压区边缘纤维应变也恰好到达混凝土受弯时极限压应变值，这种破坏形态叫“界限破坏”，即适筋梁与超筋梁的界限。这个特定的配筋率 ρ_b 实质上就限制了适筋梁的最大配筋率。故当截面的实际配筋率 $\rho < \rho_b$ 时，破坏始自钢筋的屈服； $\rho > \rho_b$ 时，破坏始自受压区混凝土的压碎； $\rho = \rho_b$ 时，受拉钢筋应力到达屈服强度的同时受压区混凝土压碎使截面破坏。界限破坏也属于延性破坏类型，所以界限配筋的梁也属于适筋梁的范围。可见，梁的配筋应满足 $\rho_{\min}h/h_0 \leq \rho \leq \rho_b$ 的要求。

4.4 正截面受弯承载力计算的基本假定及应用

4.4.1 正截面承载力计算的基本假定

《混凝土结构设计规范》(GB50010—2002)规定，正截面承载力应按下列基本假定进行计算：

(1) 截面应变保持平面

截面应变保持平面是指在荷载作用下，梁的变形规律符合“平均应变平截面假定”，简称平截面假定。国内外大量实验，包括矩形、T形、I字形及环形截面的钢筋混凝土构件受力以后，截面各点的混凝土和钢筋纵向应变沿截面的高度方向呈直线变化。虽然就单个截面而言，此假定不一定成立，但在一定长度范围内还是正确的。该假定说明了在一定标距内，即跨越若干条裂缝后，钢筋和混凝土的变形是协调的。同时平截面假定也是简化计算的一种手段。

(2) 不考虑混凝土的抗拉强度

忽略中和轴以下混凝土的抗拉作用主要是因为混凝土的抗拉强度很小，且其合力作用点离中和轴较近，抗弯力矩的力臂很小的缘故。

(3) 混凝土受压的应力与压应变关系曲线按下列规定取用：

混凝土受压应力—应变关系曲线方程为：

当 $\varepsilon_c \leq \varepsilon_0$ 时(上升段)：

$$\sigma_c = f_c \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^n \right] \quad (4-3)$$

当 $\varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$ 时(水平段):

$$\sigma_c = f_c \quad (4-4)$$

$$n = 2 - \frac{1}{60} (f_{cu,k} - 50) \quad (4-5)$$

$$\varepsilon_0 = 0.002 + 0.5 (f_{cu,k} - 50) \times 10^{-5} \quad (4-6)$$

$$\varepsilon_{cu} = 0.0033 - (f_{cu,k} - 50) \times 10^{-5}$$

式中, σ_c ——对应于混凝土应变为 ε_c 时的混凝土压应力; ε_0 ——对应于混凝土压应力刚达到混凝土轴心抗压强度设计值 f_c 时的混凝土压应变, 当计算的 ε_0 值小于 0.002 时, 应取为 0.002; ε_{cu} ——正截面的混凝土极限压应变, 当处于非均匀受压时计算的 ε_{cu} 值大于 0.0033 时, 取为 0.0033; $f_{cu,k}$ ——混凝土立方体抗压强度标准值; n ——系数, 当计算的 n 大于 2.0 时, 应取为 2.0。

由表 4-3 可见, 当混凝土的强度等级小于和等于 C50 时, $n, \varepsilon_0, \varepsilon_{cu}$ 均为定值。当混凝土的强度等级大于 C50 时, 随着混凝土强度等级的提高, ε_0 的值不断增大, 而 ε_{cu} 值却逐渐减小, 即水平区段逐渐缩短, 材料的脆性加大。

(4) 纵向钢筋的应力取等于钢筋应变与其弹性模量的乘积, 但其绝对值不应大于其相应的强度设计值, 纵向受拉钢筋的极限拉应变取 0.01, 即

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \varepsilon_s E_s \leq f_y \\ \sigma'_s &= \varepsilon'_s E'_s \leq f'_y \\ \varepsilon_{s,\max} &= 0.01 \end{aligned} \quad (4-7)$$

4.4.2 等效矩形应力图

《混凝土结构设计规范》(GB50010-2001) 规定, 受弯构件正截面受压区混凝土的应力图形可简化为等效的矩形应力图。

矩形应力图的受压区高度 x 可取等于按截面应变保持平面的假定所确定的中和轴高度乘以系数 β_1 。当混凝土强度等级不超过 C50 时, β_1 取为 0.8, 当混凝土强度等级为 C80 时, β_1 取为 0.74, 其间按线性内插法确定。矩形应力图的应力值取为混凝土

轴心抗压强度设计值 f_c 乘以系数 α_1 。当混凝土强度等级不超过C50时， α_1 取为1.0，当混凝土强度等级为C80时， α_1 取为0.94，其间按线性内插法确定。

图4—12为一单筋矩形截面适筋梁的应力图形，其受压区混凝土的压应力图形符合图4—11所示的曲线，此图形可称为理论应力图形。当混凝土强度等级为C50及以下时，截面受压区边缘达到了混凝土的极限压应变值 $\varepsilon_{cu}=0.0033$ 。当达到受弯承载力设计值 M_u 时，合力 C 和作用位置 y_c 仅与混凝土应力—应变曲线形状及受压区高度 x_c 有关，而在 M_u 的计算中也仅需知道 C 的大小和作用位置 y_c 就足够了。

等效矩形应力图形代换受压区混凝土的理论应力图形，两个图形的等效条件是：

- 1) 等效矩形应力图的合力应等于曲线应力图的合力；
- 2) 两图形中受压区合力 C 的作用点不变。

从图4—12可以看出，等效矩形应力图由无量纲参数 α_1 ， β_1 所确定，它们的大小仅与混凝土应力—应变曲线有关，称为等效矩形应力图形系数。其中， α_1 是等效矩形应力图形的应力值与混凝土轴心抗压强度 f_c 的比值， β_1 是混凝土受压区高度 x 与中和轴高度 x_c 的比值。 α_1 和 β_1 的取值。

4.4.3 基本方程

采用等效矩形应力图，受弯承载力设计值的计算公式可写成：

$$\sum N = 0, \quad \alpha_1 f_c b x = f_y A_s \quad (4-8)$$

$$\sum M = 0, \quad M_u = \alpha_1 f_c b x (h_0 - \frac{x}{2}) \quad (4-9)$$

等效矩形应力图受压区高度 x 与截面有效高度 h_0 的比值记为 $\xi = x/h_0$ ，称为相对受压区高度。则上式可写成：

$$\alpha_1 f_c b \xi h_0 = f_y A_s \quad (4-10)$$

$$M_u = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi (1 - 0.5\xi) \quad (4-11)$$

相对受压区高度 ξ 不仅反映了钢筋与混凝土的面积比，也反映了钢筋与混凝土的材料强度比，是反映构件中两种材料配比本质的参数。

4.4.4 适筋梁与超筋梁的界限及界限配筋率

我们知道，适筋梁与超筋梁的界限破坏为在受拉纵筋屈服的同时，混凝土受压边缘纤维也达到其极限压应变值 ε_{cu} ，截面破坏。设钢筋开始屈服时的应变为 ε_y ，则

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} \quad (4-12)$$

式中， E_s 为钢筋的弹性模量。

设界限破坏时中和轴高度为 x_{cb} ，则有

$$\frac{x_{cb}}{h_0} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y} \quad (4-13)$$

把 $x_b = \beta_1 \cdot x_{cb}$ 带入上式，得

$$\frac{x_b}{\beta_1 h_0} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y} \quad (4-14)$$

设 $\xi_b = \frac{x_b}{h_0}$ ，称为界限相对受压区高度。

$$\xi_b = \frac{\beta_1}{1 + \frac{f_y}{E_s \cdot \varepsilon_{cu}}} \quad (4-15)$$

式中， h_0 ——截面有效高度； x_b ——界限受压区高度； f_y ——纵向钢筋的抗拉强度设计值； ε_{cu} ——非均匀受压时混凝土极限压应变值，按式（4-6）计算，混凝土强度等级不大于C50时， $\varepsilon_{cu} = 0.0033$ 。

对于碳素钢丝、钢绞线、热处理钢筋以及冷轧带肋钢筋等无明显屈服点的钢筋，取对应于残余应变为 0.2% 时的应力 $\sigma_{0.2}$ 作为条件屈服点，并以此作为这类钢筋的抗拉强度设计值。

$$\varepsilon_s = 0.002 + \varepsilon_y = 0.002 + \frac{f_y}{E_s} \quad (4-16)$$

式中， f_y ——无明显屈服点钢筋的抗拉强度设计值； E_s ——无明显屈服点钢筋的弹性模量。

根据截面平面变形等假设，将推导公式(4-15)时的 ε_y 用公式(4-16)的 ε_s 代替，可以求得无明显屈服点钢筋配筋的受弯构件相对界限受压区高度 ξ_b 的计算公式为：

$$\xi_b = \frac{\beta_1}{1 + \frac{0.002}{\varepsilon_{cu}} + \frac{f_y}{E_s \varepsilon_{cu}}} \quad (4-17)$$

当相对受压区高度 $\xi < \xi_b$ 时,属于适筋破坏或少筋破坏,当相对受压区高度 $\xi > \xi_b$ 时,属于超筋破坏,当 $\xi = \xi_b$ 时,属于界限情况,与此对应的纵向受拉钢筋的配筋率,称为界限配筋,记作 ρ_b ,即为适筋梁的最大配筋率 ρ_{\max} ,此时考虑截面上力的平衡条件,在式(4-9)中,以 x_b 代替 x ,则有

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_c b x_b &= f_y A_s \\ \text{故} \quad \rho_b &= \frac{A_s}{b h_0} = \alpha_1 \xi_b \frac{f_c}{f_y} \end{aligned} \quad (4-18)$$

这里, x_{cb} 、 x_b 、 ρ_b 、 ξ_b 中的下角 b 表示界限。

当构件按最大配筋率配筋时,由式(4-9)可以求出适筋受弯构件所能承受的最大弯矩为:

$$M_{\max} = \alpha_1 f_c b \xi_b h_0 \left(h_0 - \frac{\xi_b h_0}{2} \right) = \xi_b \left(1 - \frac{\xi_b}{2} \right) b h_0^2 \alpha_1 f_c = \alpha_{sb} b h_0^2 \alpha_1 f_c \quad (4-19)$$

$$\alpha_{sb} = \xi_b \left(1 - \frac{\xi_b}{2} \right) \quad (4-20)$$

式中 α_{sb} 一截面最大的抵抗矩系数。

由上面的讨论可知,为了防止将构件设计成超筋构件,用 $\xi \leq \xi_b$, $\rho \leq \rho_b = \rho_{\max}$ 或 $\alpha_s \leq \alpha_{s\max}$ 进行控制,三者是等效的。

4.4.5 最小配筋率

少筋破坏的特点是一裂就坏,所以从理论上讲,纵向受拉钢筋的最小配筋率 ρ_{\min} 应是这样确定的:按 III_a 阶段计算钢筋混凝土受弯构件正截面受弯承载力与按 I_a 阶段计算的素混凝土受弯构件正截面受弯承载力两者相等。但是,考虑到混凝土抗拉强度的离散性,以及收缩等因素的影响,所以在实用上,最小配筋率 ρ_{\min} 往往是根据传统经验得出的。为了防止梁“一裂即坏”,适筋梁的配筋率应大于 ρ_{\min} 。我国《混凝土结构设计规范》对最小配筋率有如下规定:

(1) 受弯构件、偏心受拉、轴心受拉构件,其一侧纵向受拉钢筋的配筋百分率不应小于 0.2% 和 $45 \frac{f_t}{f_y}$ 中的较大值;

(2) 卧置于地基上的混凝土板，板的受拉钢筋的最小配筋百分率可适当降低，但不应小于0.15%。

4.5 单筋矩形截面受弯构件正截面受弯承载力计算

矩形截面通常分为单筋矩形截面和双筋矩形截面两种形式。只在截面的受拉区配有纵向受力筋的矩形截面，称为单筋矩形截面。不但在截面的受拉区，而且在截面的受压区同时有纵向受力钢筋的矩形截面，称为双筋矩形截面。需要说明的是，为了构造上的原因(例如为了成钢筋骨架)，梁的受压区通常也需要配置纵向钢筋，这种纵向钢筋称为架立钢筋。架立钢筋与受力钢筋的区别是：架立钢筋是根据构造要求设置，通常直径较细、根数较少；而受力钢筋则是根据受力要求按计算设置，通常直径较粗、根数较多。受压区配有架立钢筋的截面，不属于双筋截面。

4.5.1 基本计算公式及适用条件

1. 基本计算公式

单筋矩形截面受弯构件的正截面受弯承载力计算简图如图4—16所示。

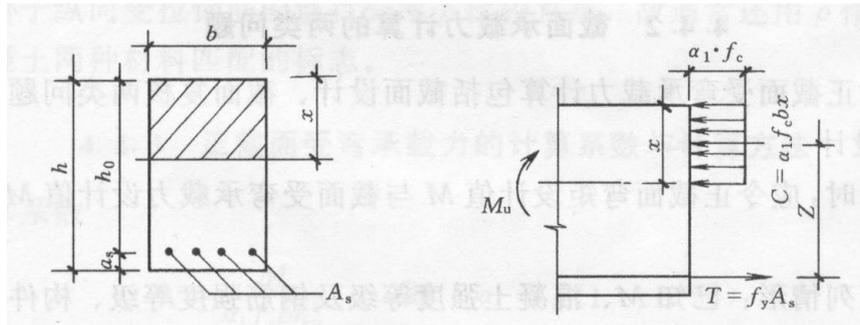


图4—16 单筋矩形截面受弯构件正截面受弯承载力计算简图

由力的平衡条件，得

$$\alpha_1 f_c b x = f_y A_s \quad (4-21)$$

由力矩平衡条件，得

$$M_u = f_y A_s \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) \quad (4-22)$$

或

$$M_u = \alpha_1 f_c b x \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) \quad (4-23)$$

2. 适用条件

基本公式是根据适筋梁的受力情况得出的，因此为了避免超筋梁和少筋梁的出现，在应用基本公式时必须符合适筋梁的配筋率的界限，即必须满足下列适用条件：

(1) 为防止超筋破坏，应满足

$$\xi \leq \xi_b \quad (4-24a)$$

$$\text{或} \quad \rho \leq \rho_b = \alpha_1 \xi_b \frac{f_c}{f_y} \quad (4-24b)$$

$$\text{或} \quad x \leq \xi_b h_0 \quad (4-24c)$$

(2) 为防止少筋破坏，应满足：

$$\rho \geq \rho_{\min} h/h_0 \quad (4-25)$$

采用 $\rho_{\min} h/h_0$ 配筋率 ρ 是以 bh_0 为基准，而最小配筋率 ρ_{\min} 则是以 bh 为基准的缘故。

适用条件(1)是为了防止超筋破坏，因此单筋矩形截面的最大受弯承载力：

$$M_{u,\max} = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi_b (1 - 0.5 \xi_b) \quad (4-26)$$

式(4-24a)和式(4-24b)代表同一含义，只是从不同的角度表达而已。只有满足式(4-25)及式(4-24a)或式(4-24b)，才能保证构件破坏时纵向受力钢筋首先屈服。

从式(4-22)及式(4-23)可知，当弯矩设计值 M 确定以后，我们可以设计出不同截面尺寸的梁。当配筋率 ρ 取得小些，梁截面就要大些；当 ρ 大些，梁截面就可小些。为了保证总造价低廉，必须根据钢材、水泥、砂石等材料价格及施工费用(包括模板费用)确定出不同 ρ 值时的造价，从中可以得出一个理论上最经济的配筋率。但根据我国生产实践经验，当 ρ 波动在最经济配筋率附近时，对总造价的影响是很不敏感的。因此，没有必要去求得理论上最经济的配筋率。

按照我国经验，板的经济配筋率约为 0.3%~0.8%；单筋矩形梁的经济配筋率约为 0.6%—1.5%。

4.5.2 截面承载力计算的两类问题

在受弯构件设计中，通常会遇见下列两类问题：一类是截面选择问题，即假定构件的截面尺寸、混凝土的强度等级、钢筋的品种以及构件上作用的荷载或截面上的内力等都是已知的，或某种因素虽然暂时未知，但可根据实际情况和设计经验假定，要求计算受拉区纵向受力钢筋所需的面积，并且根据构造要求，选择钢筋的根数和直径。另一类是承载能力校核问题，即构件的尺寸、混凝土的强度等级、钢筋的品种、数量和配筋方式等都已确定，要求计算截面是否能够承受某一已知的荷载或内力设计值。

1. 截面设计

截面设计时，应令正截面弯矩设计值 M 与截面受弯承载力设计值 M_u 相等，即 $M = M_u$ 。常遇到下列情形：已知 M 、混凝土强度等级及钢筋强度等级、构件截面尺寸 b 及 h ，求所需的受拉钢筋截面面积 A_s 。

这时，根据环境类别及混凝土强度等级，由附表查得混凝土保护层最小厚度，再假定 a_s ，得 h_0 ，并按混凝土强度等级确定 α_1 ，解二次联立方程式，然后验算适用条件(1)，即要求满足 $\xi \leq \xi_b$ 。若 $\xi > \xi_b$ ，需加大截面，或提高混凝土强度等级，或改用双筋矩形截面。若 $\xi \leq \xi_b$ ，则计算继续进行，按求出的 A_s 选择钢筋，采用的钢筋截面面积与计算所得 A_s 值，两者相差 $\pm 5\%$ ，并检查实际的值与假定的 a_s 是否大致相符，如果相差太大，则需重新计算。最后应该以实际采用的钢筋截面面积来验算适用条件(2)，即要求满足 $\rho \geq \rho_{\min}$ 。如果不满足，则纵向受拉钢筋应按 ρ_{\min} 配置。

在正截面受弯承载力设计中，钢筋直径、数量和排列等还不知道，因此纵向受拉钢筋合力点到截面受拉边缘的距离 a_s 往往需要预先估计。当环境类别为一类时(即室内环境)一般取：梁内一层钢筋时， $a_s=35\text{mm}$ ；梁内两层钢筋时， $a_s=50\sim 60\text{mm}$ ；对于板， $a_s=20\text{mm}$ 。

[例 4—1] 某矩形截面钢筋混凝土简支梁，计算跨度 $l_0=6.0\text{m}$ ，板传来的永久荷载及梁的自重标准值为 $g_k=15.6\text{ kN/m}$ ，板传来的楼面活荷载标准值 $q_k=10.7\text{ kN/m}$ ，梁的截面尺寸为 $250\text{ mm}\times 500\text{ mm}$ (图 4—17)，混凝土的强度等级为 C25，钢筋为 HRB335 钢筋，环境类别为一类，结构安全等级为二级。试求纵向受力钢筋所需面积。

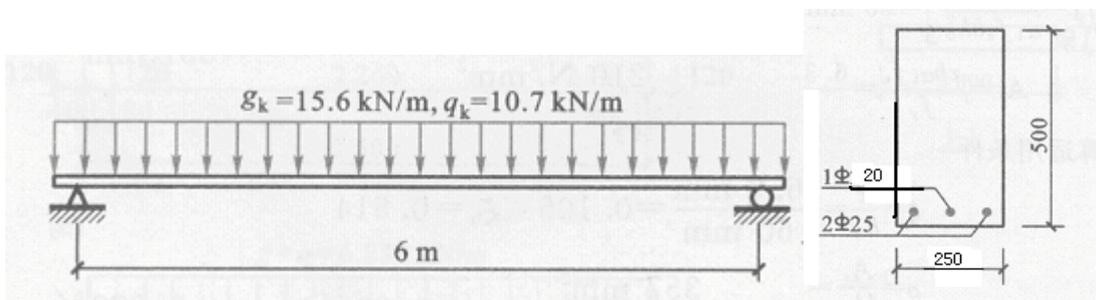


图 4—17 例题 4—1 图

[解] (1) 求最大弯矩设计值

永久荷载的分项系数为 1.2，楼面活荷载的分项系数为 1.4，结构的重要性系数

为 1.0，因此，梁的跨中截面的最大弯矩设计值为

$$M = \gamma_0 (\gamma_G M_{Gk} + \gamma_Q M_{Qk}) = 1.0 \left(1.2 \times \frac{1}{8} \times 15.6 \text{ kN/m} \times 36 \text{ m}^2 + 1.4 \times \frac{1}{8} \times 10.7 \text{ kN/m} \times 36 \text{ m}^2 \right) \\ = 151.65 \text{ kNm.}$$

(2) 求所需纵向受力钢筋截面面积

由附表 1-9 查得当混凝土的强度等级为 C25 时， $f_c = 11.9 \text{ N/mm}^2$ ， $f_t = 1.27 \text{ N/mm}^2$ ， $\alpha_1 = 1.0$ ，由附表 1-3 查得 HRB335 钢筋的 $f_y = 300 \text{ N/mm}^2$ 。

先假定受力钢筋按一排布置，则 $h_0 = 500 \text{ mm} - 35 \text{ mm} = 465 \text{ mm}$

$$\alpha_1 f_c b x = f_y A_s$$

$$M_u = \alpha_1 f_c b x \left(h_0 - \frac{x}{2} \right)$$

$$x = h_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{\alpha_1 f_c b h_0^2}} \right)$$

$$A_s = \frac{x b \alpha_1 f_c}{f_y}$$

联立求解上述二式，得 $x = 127.0 \text{ mm}$ ，由表 4-5 查得 $\xi_b = 0.55$ ，相对受压区高度

$$\text{为 } \xi = \frac{x}{h_0} = \frac{127}{465} = 0.273 < \xi_b$$

$A_s = 1259.4 \text{ mm}^2$ ，选用 1 $\Phi 20$ 和 2 $\Phi 25$ ， $A_s = 1296.2 \text{ mm}^2$ ，

(3) 验算适用条件

配筋率为

$$\rho = \frac{A_s}{b h_0} = \frac{1296.2}{250 \times 465} = 1.115\% > \rho_{\min} h/h_0 = 45 \frac{f_t}{f_y} h/h_0 = 45 \frac{1.27}{300} \times \frac{500}{465} = 0.205\%$$
，同时

$\rho > 0.2$ ， $\xi = 0.273 < \xi_b$ ，因此，两项适用条件均能满足。

2. 截面复核

已知： M 、 b 、 h 、 A_s 混凝土强度等级及钢筋强度等级，求 M_u 。

先由 $\rho = \frac{A_s}{b h_0}$ 计算 $\xi = \rho \frac{f_y}{\alpha_1 f_c}$ ，如果满足 $\xi < \xi_b$ ，及 $\rho \geq \rho_{\min}$ 两个适用条件，则按

式 (4-22) 或式 (4-23) 求出：

$$M_u = f_y A_s h_0 (1 - 0.5\xi)$$

或

$$M_u = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi (1 - 0.5\xi)$$

当 $M_0 \geq M$ 时，认为截面受弯承载力满足要求，否则为不安全。当 M_0 大于 M 过多时，该截面设计不经济。

这里补充说一下 ξ 的物理意义：①由 $\xi = x/h_0$ 知， ξ 称为相对受压区高度；②

由 $\xi = \rho \frac{f_y}{\alpha_1 f_c}$ 知， ξ 与纵向受拉钢筋配筋百分率 ρ 相比，不仅考虑了纵向受拉钢筋截

面面积 A_s 与混凝土有效面积 bh_0 的比值，也考虑了两种材料力学性能指标的比值，能更全面地反映纵向受拉钢筋与混凝土有效面积的匹配关系，因此又称 ξ 为配筋系数。由于纵向受拉钢筋配筋百分率 ρ 比较直观，故通常还用 ρ 作为纵向受拉钢筋与混凝土两种材料匹配的标志。

4.5.3 正截面受弯承载力的计算系数与计算方法

应用基本公式进行截面设计时，一般需求解二次方程式，计算过程比较麻烦，为了简化计算，可根据基本公式给出一些计算系数，从而使计算过程得到简化。

取计算系数

$$\alpha_s = \frac{M}{\alpha_1 f_c b h_0^2} \quad \text{即} \quad \alpha_s = \xi(1 - 0.5\xi) \quad (4-27)$$

$$\gamma_s = 1 - 0.5\xi \quad (4-28)$$

令 $M = M_0$ ，解联立方程式 (4-21) 与式 (4-22) 或式 (4-21) 与式 (4-23)，可得

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - 2\alpha_s} \quad (4-29)$$

$$\gamma_s = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\alpha_s}}{2} \quad (4-30)$$

$$\alpha_1 f_c b h_0 \xi = f_y A_s \quad (4-31)$$

$$M \leq M_u = \alpha_1 f_c \alpha_s b h_0^2 = f_y A_s \gamma_s h_0 \quad (4-32)$$

因此，当按式 (4-27) 求出 α_s 值后，就可由式 (4-29)、式 (4-30) 求得 ξ 、 γ_s 值，再利用基本计算公式及适用条件，使正截面受弯承载力的计算得到解决。

γ_s 称为内力矩的力臂系数, α_s 称为截面抵抗矩系数, 相当于匀质弹性体矩形截面梁抵抗矩 W 中的系数 $\frac{1}{6}$ 。配筋率 ρ 越大, γ_s 越小, 而 α_s 越大。

下面按截面设计及截面复核两种情况, 分别说明利用计算系数进行计算的具体步骤。

1. 截面设计

已知弯矩设计值 M 、混凝土强度等级和钢筋种类、构件截面尺寸 b 及 h 等, 要求确定所需的受拉钢筋截面面积 A_s 。主要计算步骤如下:

1) 根据材料强度等级查出其强度设计值 f_y 、 f_c 及系数 α_1 。

2) 计算截面有效高度 $h_0 = h - a_s$, 通常假定布置一排钢筋计算 h_0 , 如果 M 较大, 也可假定钢筋为两排。

3) 按下式计算所需的截面抵抗矩系数 α_s :

$$\alpha_s = \frac{M}{\alpha_1 f_c b h_0^2} \quad (4-33)$$

4) 将 α_s 值代入式 (4-29) 或 (4-30) 计算相应的 ξ 值或 γ_s 值。如果 $\xi > \xi_b$, 则须加大截面高度 h 重新进行计算。当然, 加大截面宽度 b 或提高混凝土强度等级也可降低 ξ 值, 但效果较差。

5) 将 ξ 值或 γ_s 值分别代入式 (4-31) 或 (4-32) 计算所需的钢筋面积 A_s , 即

$$A_s = \frac{\alpha_1 f_c b \xi h_0}{f_y} \quad (4-34)$$

或

$$A_s = \frac{M}{f_y \gamma_s h_0} \quad (4-35)$$

6) 按 A_s 值选用钢筋直径及根数, 并在梁截面内布置, 以检验实配钢筋排数是否与原假设相符。

7) 检查适筋梁的最小配筋率 $\rho_{\min} h/h_0$ 是否满足。

在截面设计过程中, 当其他条件已知或已选定后, 有时也可按经济配筋率选取 ρ 值, 并由此确定 h_0 及 A_s 。这时可按下述步骤进行计算:

1) 查出其强度设计值 f_y 、 f_c 及系数 α_1 。

2) 按所选取的 ρ 值计算相应的 ξ 值:

$$\xi = \rho \frac{f_y}{\alpha_1 f_c} \quad (4-36)$$

3) 根据 ξ 值由式 (4-29) 或 (4-30) 计算相应的 α_s 值或 γ_s 值。

4) 计算截面的有效高度 h_0

$$h_0 = \sqrt{\frac{M}{\alpha_s b \alpha_1 f_c}} \quad (4-37)$$

$$h_0 = \sqrt{\frac{M}{\rho \gamma_s b f_y}} \quad (4-38)$$

5) 计算所需的钢筋面积 A_s , 即

$$A_s = \rho b h_0$$

或
$$A_s = \frac{M}{f_y \gamma_s h_0}$$

6) 按 A_s 值选用钢筋直径及根数, 并在梁截面内布置, 最后由 h_0 值以及钢筋排数确定梁的截面高度 h 。

[例 4—3] 已知矩形梁截面尺寸 $b \times h = 250\text{mm} \times 500\text{mm}$; 环境类别为一级, 弯矩设计值 $M = 148\text{kN} \cdot \text{m}$, 混凝土强度等级为 C25, 钢筋采用 HRB335 级钢筋, 即 II 级钢筋。求所需的纵向受拉钢筋截面面积。

(解)

1) 由混凝土和钢筋等级, 查附表 1-3, 1-9, 得 $f_c = 11.9\text{N/mm}^2$, $f_y = 300\text{N/mm}^2$, $f_t = 1.27\text{N/mm}^2$, 由表 4—4 知: $\alpha_1 = 1.0$, $\beta_1 = 0.8$, 由表 4—5 知: $\xi_b = 0.55$ 。

2) 由附表 1-16 知, 环境类别为一类, C25 时梁的混凝土保护层最小厚度为 25mm, 设 $a_s = 35\text{mm}$, 则 $h_0 = 500 - 35 = 465\text{mm}$

$$3) \alpha_s = \frac{M}{\alpha_1 f_c b h_0^2} = \frac{148 \times 10^6}{1.0 \times 11.9 \times 250 \times 465^2} = 0.23$$

4) 由式 (4—29)、式 (4—30) 得,

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - 2\alpha_s} = 0.265 < \xi_b = 0.55, \text{ 可以。}$$

$$\gamma_s = 0.5 \times (1 + \sqrt{1 - 2\alpha_s}) = 0.867$$

$$5) A_s = \frac{M}{f_y \gamma_s h_0} = \frac{148 \times 10^6}{300 \times 0.867 \times 465} = 1223.7 \text{ mm}^2$$

6) 选用 4 Φ 20, $A_s = 1256 \text{ mm}^2$, (选用钢筋时应满足有关间距、直径及根数等的构造要求), 见图 4—18。

7) 验算适用条件:

(1) 适用条件(1)已满足。

$$(2) \rho = \frac{1256}{250 \times 465} = 1.08\% > \rho_{\min} = 45 \frac{f_t}{f_y} = 45 \times \frac{1.27}{300} = 0.191\%, \text{ 同时 } \rho > 0.2\%, \text{ 可以。}$$

注意, 验算适用条件时, 要用实际采用的纵向受拉钢筋截面面积。

2. 截面复核

已知材料强度等级、构件截面尺寸及纵向受拉钢筋面积 A_s , 求该截面所能承担的极限弯矩 M_u 。主要计算步骤如下:

1) 根据材料强度等级查出其强度设计值 f_y 、 f_c 及系数 α_1 。

2) 计算截面有效高度 $h_0 = h - a_s$ 。

3) 按下式计算相对受压区高度 ξ : $\rho = \frac{A_s}{bh_0}$, $\xi = \rho \frac{f_y}{\alpha_1 f_c}$

4) 校核 $\rho = \frac{A_s}{bh_0} > \rho_{\min} h/h_0 = 45 \frac{f_t}{f_y} \frac{h}{h_0}$, 同时 ρ 值也大于 0.2%; $\xi = \rho \frac{f_y}{\alpha_1 f_c} < \xi_b$ 。

5) 按求得的 ξ 值计算相应的 α_s 值或 γ_s 值。

6) 按下式计算截面所能负担的极限弯矩 M_u :

$$M_u = f_y A_s h_0 \gamma_s$$

或

$$M_u = \alpha_s \alpha_1 f_c b h_0^2$$

4.6 双筋矩形截面受弯构件的正截面受弯承载力计算

4.6.1 概述

单筋矩形截面梁通常是在正截面的受拉区配置纵向受拉钢筋, 在受压区配置纵向架立筋, 再用箍筋把它们一起绑扎成钢筋骨架。其中, 受压区的纵向架立钢筋虽然受压, 但对正截面受弯承载力的贡献很小, 所以只在构造上起架立钢筋的作用,

在计算中是不考虑的。如果在受压区配置的纵向受压钢筋数量比较多，不仅起架立钢筋的作用，而且在正截面受弯承载力的计算中必须考虑这种钢筋的受压作用，则这样配筋的截面称为双筋截面。然而在正截面受弯中，采用纵向受压钢筋协助混凝土承受压力是不经济的，所以从承载力计算角度出发，双筋矩形截面只适用于以下情况：

(1) 梁的同一截面有承受异号弯矩的可能时，例如连续梁中的跨中截面，本跨荷载较大时则发生正弯矩，而当相邻跨荷载较大时则可能会出现负弯矩。这样，随着梁上作用荷载的变化，梁跨中截面受拉区与受压区的位置发生互换，梁截面内上、下钢筋所需的数量都比较多，因此在对正弯矩或负弯矩分别进行截面受弯承载力计算时都可按双筋截面梁计算。再如结构或构件承受地震等交变的作用，使截面上的弯矩改变方向；

(2) 截面承受的弯矩设计值大于单筋截面所能承受的最大弯矩设计值，而梁截面尺寸受到限制，混凝土强度等级又不能提高时，在受压区配置受力钢筋以补充混凝土受压能力的不足；

(3) 结构或构件的截面由于某种原因，在截面的受压区预先已经布置了一定数量的受力钢筋，宜考虑其受压作用而按双筋梁计算。例如框架梁按抗震要求设计时，梁端截面的底面和顶面纵向钢筋面积的比值除按计算确定外，一般尚不应小于0.3，对重要框架则不应小于0.5。

受压钢筋可以提高截面的延性，并可减少构件在荷载作用下的变形，但用钢量较大。因此，除在抗震结构中要求框架梁必须配置一定比例的受压钢筋外，一般来说采用双筋截面不经济的。为了节约钢材，应尽可能地不要将截面设计成双筋截面。配置受压钢筋后，为防止纵向受压钢筋可能发生纵向弯曲(压屈)而向外凸出，引起保护层剥落甚至使受压混凝土过早发生脆性破坏，应按规范规定，箍筋应做成封闭式，其间距不应大于 $15d$ (d 为受压钢筋最小直径)，如图4-21所示。

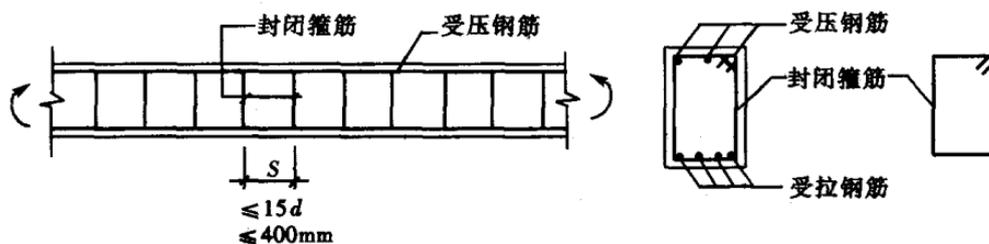


图 4-21 双筋矩形截面梁配置封闭箍筋的构造要求

4.6.2 基本计算公式与适用条件

1. 纵向受压钢筋的抗压强度的取值为 f'_y

根据双筋梁截面的应变及应力分布图 4-22 所示, 有:

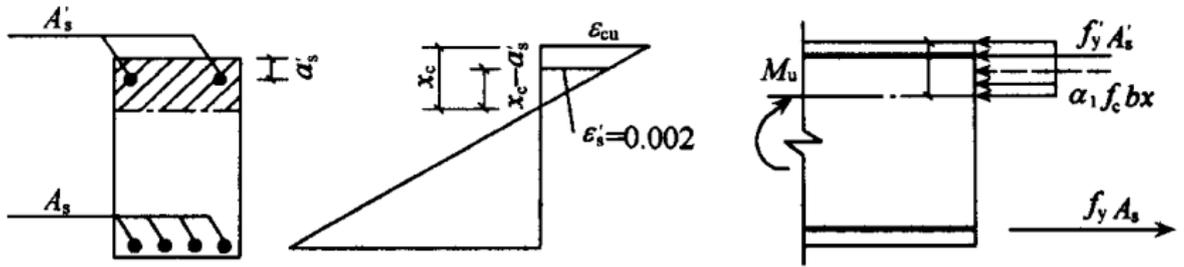


图 4-22 双筋梁截面的应变及应力分布

$$\varepsilon'_s = \frac{x_c - a'_s}{x_c} \varepsilon_{cu} = \left(1 - \frac{a'_s}{x/\beta_1}\right) \varepsilon_{cu} = \left(1 - \frac{\beta_1 a'_s}{x}\right) \varepsilon_{cu} \quad (4-39)$$

若取 $x = 2a'_s$, 则由平截面假定可得受压钢筋的压应变值,

$$\varepsilon'_s = \left(1 - \frac{a'_s \beta_1}{2a'_s}\right) \varepsilon_{cu} = (1 - 0.5\beta_1) \varepsilon_{cu}$$

当 $f_{cu,k} = 80\text{N/mm}^2$, 有 $\varepsilon_{cu} = 0.003$, $\beta_1 = 0.74$, 得 $\varepsilon'_s = 0.0019$ 。

对 HPB235 级钢级, $\sigma'_s = E_s \varepsilon'_s = 2.1 \times 10^5 \times 0.0019 = 399\text{N/mm}^2 > f'_y = 210\text{N/mm}^2$;

对 HPB335 级钢级, $\sigma'_s = E_s \varepsilon'_s = 2.0 \times 10^5 \times 0.0019 = 380\text{N/mm}^2 > f'_y = 300\text{N/mm}^2$;

对 HRB400 级钢级, $\sigma'_s = E_s \varepsilon'_s = 2.0 \times 10^5 \times 0.0019 = 380\text{N/mm}^2 > f'_y = 360\text{N/mm}^2$;

所以, 此值对于 HPB235、HRB335 和 HRB400 级钢筋, 其相应的压应力 σ'_s 已达到抗压强度设计值 f'_y , 故纵向受压钢筋的抗压强度采用 f'_y 的先决条件是:

$$x \geq 2a'_s \quad \text{或} \quad z \leq h_0 - a'_s \quad (4-40)$$

其含义为受压钢筋位置不低于矩形受压应力图形的重心。当不满足式 (4-40) 规定时, 则表明受压钢筋的位置离中和轴太近, 受压钢筋的应变 ε'_s 太小, 以致其应力达不到抗压强度设计值 f'_y 。

2. 计算公式及适用条件

双筋矩形截面受弯构件正截面受弯的截面计算图形如图 4-23 (a) 所示。

由力的平衡条件可得

$$\sum X = 0 \quad \alpha_1 f_c b x + f'_y A'_s = f_y A_s \quad (4-41)$$

由对受拉钢筋合力点取矩的力矩平衡条件, 可得

$$\sum M = 0 \quad M_u = \alpha_1 f_c b x \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) + f'_y A'_s (h_0 - a'_s) \quad (4-4)$$

2)

应用以上两式时，必须满足下列适用条件

$$(1) \quad x \leq \xi_b h_0 \quad (4-43)$$

$$(2) \quad x \geq 2a'_s \quad (4-44)$$

对于双筋截面，一般不需验算受拉钢筋是否大于最小配筋率的条件，因为双筋截面中的纵向受拉钢筋面积通常较多，一般都能够满足最小配筋率要求。

满足条件式(4-43)，可防止受压区混凝土在受拉区纵向受力钢筋屈服前压碎。满足条件式(4-44)，可防止受压区纵向受力钢筋在构件破坏时达不到抗压强度设计值。因为当 $x < 2a'_s$ 时，受压钢筋的应变 ϵ'_s 很小，受压钢筋不可能屈服。当不满足条件式(4-44)时，受压钢筋的应力达不到 f'_y 而成为未知数，这时可近似地取 $x = 2a'_s$ ，并将各力对受压钢筋的合力作用点取矩得

$$M \leq f_y A_s (h_0 - a'_s) \quad (4-45)$$

用式(4-45)可以直接确定纵向受拉钢筋的截面面积 A_s ，这样有可能使求得的 A_s 比不考虑受压的存在而按单筋矩形截面计算的 A_s 还大，这时应按单筋截面的计算结果配筋。

若由构造要求或按正常使用极限状态计算要求配置的纵向受拉钢筋截面面积大于正截面受弯承载力要求，则在验算 $x \leq \xi_b h_0$ 时，可仅取正截面受弯承载力条件所需的纵向受拉钢筋面积。

4.6.3 双筋矩形截面的计算方法

1. 截面设计

双筋梁的截面设计，一般是已知截面尺寸等，求受压钢筋和受拉钢筋。有时因构造要求，受压钢筋截面面积为已知，求受拉钢筋。已如前述，截面设计时，令 $M = M_0$ 。

(1) 情况1：已知截面尺寸 $b \times h$ ，混凝土强度等级及钢筋等级，弯矩设计值 M ，求：受压钢筋 A'_s 和受拉钢筋 A_s 。

由于式(4-41)及式(4-42)的两个基本计算公式中含有 x 、 A'_s 、 A_s 三个未知数，其解是不定的，故尚需补充一个条件才能求解。显然，在截面尺寸及材料强度已知情况下，只有引入 $(A'_s + A_s)$ 之和最小为其最优解。在一般情况下，取 $f_y = f'_y$ ，由式(4-42)可有

$$A'_s = \frac{M - \alpha_1 f_c b x \left(h_0 - \frac{x}{2} \right)}{f'_y (h_0 - a'_s)} \quad (4-46)$$

由式(4-41), 令 $f_y = f'_y$, 可得

$$A_s = A'_s + \frac{\alpha_1 f_c b x}{f_y} \quad (4-47)$$

由式(4-46)与式(4-47)相加, 化简可得

$$A_s + A'_s = \frac{\alpha_1 f_c b x}{f_y} + 2 \frac{M - \alpha_1 f_c b x \left(h_0 - \frac{x}{2} \right)}{f'_y (h_0 - a'_s)}$$

将上式对 x 求导, 令 $\frac{d(A_s + A'_s)}{dx} = 0$, 得到

$$\frac{x}{h_0} = \xi = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a'_s}{h_0} \right) \quad (4-48)$$

为满足适用条件, 当 $\xi > \xi_b$ 时应取 $\xi = \xi_b$; 对于HRB335、HRB400级钢筋及常用的 a'_s/h_0 值的情况下, 当 $\xi = 0.5(1 + a'_s/h_0) \geq \xi_b$, 实用上可直接取 $\xi = \xi_b$ 。对于HPB235级钢筋, 在混凝土强度等级小于C50时, 可取 $\xi = 0.55$ 计算, 此时, 若仍取 $\xi = \xi_b$, 则钢筋用量略有增加。

当取 $\xi = \xi_b$ 时, 令 $M = M_b$, 由式(4-42)可得

$$A'_s = \frac{M - \alpha_1 f_c b x_b \left(h_0 - \frac{x_b}{2} \right)}{f'_y (h_0 - a'_s)} = \frac{M - \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi_b (1 - 0.5 \xi_b)}{f'_y (h_0 - a'_s)} \quad (4-49)$$

由式(4-41)可得

$$A_s = A'_s \frac{f'_y}{f_y} + \xi_b \frac{\alpha_1 f_c b h_0}{f_y} \quad (4-50)$$

上式中取 $f'_y \neq f_y$, 以求得通式。(在工程实践中一般多为 $f'_y = f_y$)。

综上所述, 情况1的设计计算步骤为:

- 1) 根据材料强度等级查出其强度设计值 f_y 、 f_c 及系数 α_1 。
- 2) 计算截面有效高度 $h_0 = h - a_s$, 通常假定布置二排钢筋计算 h_0 。

$$3) \text{ 计算 } \alpha_s = \frac{M}{\alpha_1 f_c b h_0^2}, \quad \xi = 1 - \sqrt{1 - 2\alpha_s}$$

若 $\xi < \xi_b$, 按单筋矩形截面梁进行设计; 当 $\xi > \xi_b$, 这就说明, 如果设计成单筋矩形截面, 将会出现 $x > \xi_b h_0$ 的超筋情况。若不能加大截面尺寸, 又不能提高混凝土强度等级, 则应设计成双筋矩形截面。

$$4) \text{ 按双筋矩形截面设计, 令 } \xi = \xi_b, \quad M_{u2} = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi_b (1 - 0.5\xi_b), \quad A_{s2} = \frac{\alpha_1 f_c b \xi_b h_0}{f_y}$$

$$5) \quad A'_s = \frac{M - M_{u2}}{f'_y (h_0 - a'_s)}, \quad A_s = \frac{M - \alpha_1 f_c b \xi_b h_0^2 (1 - 0.5\xi_b)}{f'_y (h_0 - a'_s)}$$

$$6) \quad A_s = A'_s \frac{f'_y}{f_y} + \xi_b \frac{\alpha_1 f_c b h_0}{f_y}$$

7) 按 A_s , A'_s 值选用钢筋直径及根数, 并在梁截面内布置, 以检验实配钢筋排数是否与原假设相符。

[例 4—6] 已知梁的截面尺寸为 $b \times h = 250\text{mm} \times 500\text{mm}$, 混凝土强度等级为 C40, 钢筋采用 HRB335, 即 II 级钢筋, 截面弯矩设计值 $M = 400\text{kN} \cdot \text{m}$ 。环境类别为一类。求: 所需受压和受拉钢筋截面面积 A_s 、 A'_s 。

(解) 查表得, $f_c = 19.1\text{N/mm}^2$, $f_y = f'_y = 300\text{N/mm}^2$, $\alpha_1 = 1.0$, $\beta_1 = 0.8$ 。假定受拉钢筋放两排, 设 $a_s = 60\text{mm}$, 则 $h_0 = h - a_s = 500 - 60 = 440\text{mm}$

$$\alpha_s = \frac{M}{\alpha_1 f_c b h_0^2} = \frac{400 \times 10^6}{1 \times 19.1 \times 250 \times 440^2} = 0.433$$

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - 2\alpha_s} = 0.634 > \xi_b = 0.55$$

这就说明, 如果设计成单筋矩形截面, 将会出现 $x > \xi_b h_0$ 的超筋情况。假设不加大截面尺寸, 又不提高混凝土强度等级, 按双筋矩形截面进行设计。

取 $\xi = \xi_b$,

$$\begin{aligned} M_{u2} &= \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi_b (1 - 0.5\xi_b) \\ &= 1.0 \times 19.1 \times 250 \times 440^2 \times 0.55 \times (1 - 0.5 \times 0.55) = 368.62\text{kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$A'_s = \frac{M - M_{u2}}{f'_y (h_0 - a'_s)} = \frac{400 \times 10^6 - 368.62 \times 10^6}{300 \times (440 - 35)} = 258.3 \text{mm}^2$$

由式(4-50)得

$$A_s = \xi_b \frac{\alpha_1 f_c b h_0}{f_y} + A'_s \frac{f'_y}{f_y} = 0.55 \times \frac{1.0 \times 19.1 \times 250 \times 440}{300} + 258.3 \times \frac{300}{300} = 4110.1 \text{mm}^2$$

受拉钢筋选用 7 Φ 28mm 的钢筋, $A_s = 4310 \text{mm}^2$ 。受压钢筋选用 2 Φ 14mm 的钢筋, $A'_s = 308 \text{mm}^2$ 。

(2) 情况2: 已知截面尺寸 $b \times h$ 、混凝土强度等级、钢筋等级、弯矩设计值 M 及受压钢筋 A'_s , 求受拉钢筋 A_s 。

由于 A'_s 已知, 所以只有充分利用 A'_s 才能使内力臂最大, 从而算出的 A_s 才会最小。在两个基本公式(4-41)及(4-42)中, 仅 x 及 A_s , 为未知数, 故可直接联立求解。如图4-23, 将 M_0 分解为两部分, 即

$$M_0 = M_{u1} + M_{u2} \quad (4-51)$$

$$\text{其中} \quad M_{u1} = f'_y A'_s (h_0 - a'_s) \quad (4-52)$$

$$M_{u2} = M - M_{u1} = \alpha_1 f_c b x \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) \quad (4-53)$$

显然, M_{u2} 相当于单筋矩形截面梁, 可直接用公式(4-53)求出 x , 然后由式(4-22)或式(4-23)求出 A_{s2}

$$A_{s2} = \frac{\alpha_1 f_c b x}{f_y} = \frac{M_{u2}}{f_y \left(h_0 - \frac{x}{2} \right)} \quad (4-54)$$

$$\text{而} \quad A_{s1} = \frac{f'_y}{f_y} A'_s$$

$$\text{最后可得} \quad A_s = A_{s1} + A_{s2} = \frac{f'_y}{f_y} A'_s + \frac{\alpha_1 f_c b x}{f_y} \quad (4-55)$$

在求 A_{s2} 时, 尚需注意:

- (1) 若 $\xi > \xi_b$, 表明原有的 A'_s 不足, 可按 A'_s 未知的情况1计算;
- (2) 若求得的 $x < 2a'_s$ 时, 即表明 A'_s 不能到达其抗压强度设计值, 因此, 基本公式中 $\sigma'_s \neq f'_y$, 故需要求出 σ'_s , 但这样计算比较繁琐, 通常可近似认为此时内力臂为 $(h_0 - a'_s)$, 即假设混凝土压应力合力 C 也作用在受压钢筋合力点处, 这样对内力臂

计算的误差是很小的，因而对求解 A_s 的误差也就很小。即

$$A_s = \frac{M}{f_y(h_0 - a'_s)} \quad (4-56)$$

综上所述，情况2的设计计算步骤为：

- 1) 根据材料强度等级查出其强度设计值 f_y 、 f_c 及系数 α_1 。
- 2) 计算截面有效高度 $h_0 = h - a_s$ ，通常假定布置二排钢筋计算 h_0 。
- 3) 计算 $M_{u1} = f'_y A'_s (h_0 - a'_s)$ ， $M_{u2} = M - M_{u1}$
- 4) 计算 $\alpha_s = \frac{M_{u2}}{\alpha_1 f_c b h_0^2}$ ， $\xi = 1 - \sqrt{1 - 2\alpha_s}$ $x = \xi h_0$
- 5) 若 $\xi_b h_0 \geq x \geq 2a'_s$ ， $A_s = A'_s \frac{f'_y}{f_y} + \frac{\alpha_1 f_c b x}{f_y}$ ；

$$\text{若 } x < 2a'_s, A_s = \frac{M}{f_y(h_0 - a'_s)};$$

若 $x > \xi_b h_0$ 时，则说明给定的受压钢筋面积 A'_s 太少，按情况 1 进行设计计算。

6) 按 A_s ， A'_s 值选用钢筋直径及根数，并在梁截面内布置，以检验实配钢筋排数是否与原假设相符。

思考题

- 4.1 混凝土弯曲受压时的极限压应变 ϵ_{cu} 取为多少？
- 4.2 什么叫“界限破坏”？“界限破坏”时的 ϵ_{cu} 和 ϵ_s 各等于多少？
- 4.3 少筋梁为什么会突然破坏？从梁的受弯而言，最小配筋率应根据什么原则确定？
- 4.4 适筋梁从开始加载直至正截面受弯破坏经历了哪几个阶段？各阶段的主要特点是什么？与计算有何联系？
- 4.5 进行正截面承载力计算时引入了哪些基本假设？
- 4.6 什么是受压区混凝土等效矩形应力图形？它是怎样从受压区混凝土的实际应力图形得来的？
- 4.7 单筋矩形截面受弯构件受弯承载力计算公式是如何建立的？为什么要规定适用条件？
- 4.8 在什么情况下采用双筋梁？双筋梁中的纵向受压钢筋与单筋梁中的架立筋有何区别？双筋梁中是否还有架立筋？

习题

- 4.1 已知梁截面弯矩设计值 $M=90\text{KNm}$ ，混凝土强度等级为 C30，钢筋采用 HRB335，梁的高度和宽度分别为 500mm、200mm，环境类别为一类。试求所需纵向钢筋截面面积 A_s 。
- 4.2 已知梁的截面尺寸 $b\times h=200\text{mm}\times 450\text{mm}$ ，混凝土强度等级为 C30，配有四根直径为 16mm 的 HRB335 钢筋，环境类别为一类。若承受弯矩设计值 $M=70\text{kN}\cdot\text{m}$ ，试验算此梁正截面承载力是否安全。
- 4.3 已知一双筋矩形截面梁，梁的尺寸 $b\times h=200\text{mm}\times 500\text{mm}$ ，采用的混凝土强度等级为 C25，钢筋为 HRB335，截面设计弯矩 $M=210\text{kN}\cdot\text{m}$ ，环境类别为一类。试求纵向受拉钢筋和受压钢筋的截面面积。
- 4.4 已知条件同[题 4.3]，但在受压区已配置了 $2\Phi 20$ ， $A_s'=628\text{mm}^2$ 。求：纵向受拉钢筋截面面积 A_s 。
- 4.5 已知梁的截面尺寸 $b\times h=200\text{mm}\times 400\text{mm}$ ，混凝土强度等级为 C30，配有两根直径为 16mm 的 HRB335 受压钢筋和三根直径为 25mm 的受拉钢筋，要求承受弯矩设计值 $M=100\text{kN}\cdot\text{m}$ ，环境类别为二类 b。试验算此梁正截面承载力是否安全。